Nouvelle approche sur la sélection d'estimateurs

NIZAR SOILIHI

Institut de Mathématiques de Marseille
Aix-Marseille Université

CMI, 2 JUILLET 2018

Formulation du problème.

- $(\mathcal{X}^{(n)}, \mathfrak{T}^{(n)}, \mathbb{P}_f^{(n)}, f \in \mathbb{F})$ est l'expérience statistique engendrée par $X^{(n)}$.
- $A : \mathbb{F} \to \mathfrak{S}$ and $B : \mathbb{F} \to \mathfrak{S}$ sont deux applications à estimer et $\mathfrak{S}$ est un ensemble doté de semi-métrique ℓ et ρ.
- Pour toute application $X^{(n)}$-mesurable $\widetilde{Q}$ et à valeurs dans $\mathfrak{S}$,pour tout $f \in \mathbb{F}$, $q \geq 1$ on définit:

$$\mathcal{R}_A^q\left[\widetilde{Q}, f\right] = \mathbb{E}_f^{(n)}\left[\ell\left(\widetilde{Q}, A(f)\right)\right]^q$$

$$\mathcal{R}_B^q\left[\widetilde{Q}, f\right] = \mathbb{E}_f^{(n)}\left[\rho\left(\widetilde{Q}, B(f)\right)\right]^q$$

NB! Nous supposerons que $X^{(n)} = \left(X_1^{(n)}, X_2^{(n)}\right)$, où $X_1^{(n)}, X_2^{(n)}$ sont deux éléments aléatoires indépendants.

- $\mathbb{P}_{1,f}^{(n)}$ et $\mathbb{P}_{2,f}^{(n)}$ dénotent les lois marginales de $X_1^{(n)}$ et $X_2^{(n)}$;
- $\mathbb{E}_{i,f}^{(n)}, i = 1, 2$,–espérance mathématique par rapport $\mathbb{P}_{i,f}^{(n)}$.

Shéma de sélection pour l'estimation de A.Hypothèses

- $\mathfrak{H}$ est un ensemble, $\mathfrak{H}_n \subseteq \mathfrak{H}, n \in \mathbb{N}^*$, sont des sous-ensembles dénombrables.
- $\{\widehat{A}_h, h \in \mathfrak{H}\}$, $\{\widehat{A}_{h,\eta}, h, \eta \in \mathfrak{H}\}$ – $X_1^{(n)}$-mesurable à valeurs dans $\mathfrak{S}$;
- $\varepsilon_n \to 0, n \to \infty$ est une suite donnée.

$A^{commute}$. $\widehat{A}_{h,\eta} \equiv \widehat{A}_{\eta,h}$, **pour tout** $\eta, h \in \mathfrak{H}$.

A^{sup}. pour tout $n \geq 1$

i) $$\sup_{f \in \mathbb{F}} \mathbb{E}_{1,f}^{(n)} \left(\sup_{h \in \mathfrak{H}_n} \left[\ell\left(\widehat{A}_h, \Lambda_h(f)\right) - \Psi_n(h) \right]_+^q \right) \leq \varepsilon_n^q;$$

ii) $$\sup_{f \in \mathbb{F}} \mathbb{E}_{1,f}^{(n)} \left(\sup_{h,\eta \in \mathfrak{H}_n} \left[\ell\left(\widehat{A}_{h,\eta}, \Lambda_{h,\eta}(f)\right) - \left\{\Psi_n(h) \wedge \Psi_n(\eta)\right\} \right]_+^q \right) \leq \varepsilon_n^q.$$

- $\{\Lambda_h(f),\ h \in \mathfrak{H}\}$, $\{\Lambda_{h,\eta}(f),\ h, \eta \in \mathfrak{H}\}$ une famille de fonctionnelles à valeurs dans $\mathfrak{S}$;
- $\{\Psi_n(h),\ h \in \mathfrak{H}\}$ – $X_1^{(n)}$-mesurable variables **positives**.

(Ψ_n, ℓ)-règle de sélection pour l'estimation de A.

- **On définit pour tout $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}_n$**

$$\widehat{R}_n(\mathfrak{h}) = \sup_{\eta \in \mathfrak{H}_n} \left[\ell\left(\widehat{A}_{\mathfrak{h},\eta}, \widehat{A}_\eta\right) - 2\Psi_n(\eta) \right]_+$$

- **Soit $\hat{\mathfrak{h}}^{(n)} \in \mathfrak{H}_n$ un élément arbitraire $X_1^{(n)}$ – mesurable vérifiant :**

$$\widehat{R}\left(\hat{\mathfrak{h}}^{(n)}\right) + 2\Psi_n\left(\hat{\mathfrak{h}}^{(n)}\right) \leq \inf_{\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}_n} \left\{ \widehat{R}(\mathfrak{h}) + 2\Psi_n(\mathfrak{h}) \right\} + \varepsilon_n$$

- Posons pour tout $f \in \mathbb{F}$, $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}_n$ et $n \geq 1$

$$\mathcal{B}_A^{(n)}(f, \mathfrak{h}) = \ell\left(\Lambda_{\mathfrak{h}}(f), A(f)\right) + 2 \sup_{\eta \in \mathfrak{H}_n} \ell\left(\Lambda_{\mathfrak{h},\eta}(f), \Lambda_\eta(f)\right)$$

$$\psi_n(f, \mathfrak{h}) = \left[\mathbb{E}_{1,f}^{(n)} \left\{ \Psi_n^q(\mathfrak{h}) \right\} \right]^{\frac{1}{q}}$$

(Ψ_n, ℓ)-règle de sélection pour A et inégalité d'oracle correspondante

$$\widehat{R}_n(\mathfrak{h}) = \sup_{\eta \in \mathfrak{H}_n} \left[\ell\left(\widehat{A}_{\mathfrak{h},\eta}, \widehat{A}_\eta\right) - 2\Psi_n(\eta) \right]_+$$

$$\widehat{R}\left(\hat{\mathfrak{h}}^{(n)}\right) + 2\Psi_n\left(\hat{\mathfrak{h}}^{(n)}\right) \leq \inf_{\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}_n} \left\{ \widehat{R}(\mathfrak{h}) + 2\Psi_n(\mathfrak{h}) \right\} + \varepsilon_n$$

Théorème 1. Suppposons $\mathrm{A}^{\mathrm{commute}}$ et $\mathrm{A}^{\mathrm{sup}}$ vérifiées.

Alors, pour tout $f \in \mathbb{F}, n \geq 1$ on a

$$\mathcal{R}_A\left[\widehat{A}_{\hat{\mathfrak{h}}^{(n)}}, f\right] \leq \inf_{\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}_n} \left\{ \mathcal{B}_A^{(n)}(f, \mathfrak{h}) + 5\psi_n(f, \mathfrak{h}) \right\} + 6\varepsilon_n.$$

- $\mathcal{B}_A^{(n)}(f, \mathfrak{h}) = \ell\left(\Lambda_{\mathfrak{h}}(f), A(f)\right) + 2 \sup_{\eta \in \mathfrak{H}_n} \ell\left(\Lambda_{\mathfrak{h},\eta}(f), \Lambda_\eta(f)\right)$
- $\psi_n(f, \mathfrak{h}) = \left[\mathbb{E}_{1,f}^{(n)}\left\{\Psi_n^q(\mathfrak{h})\right\}\right]^{\frac{1}{q}}$

Estimation de B. Hypothèses.

- $\{\widehat{B}_{\mathfrak{h}}, \mathfrak{h} \in \mathfrak{H}\}$une famille d'applications $X_2^{(n)}$-mesurable à valeurs dans $\mathfrak{S}$;

But: Borner le risque de l'estimateur de "*substitution*" $\widehat{B}_{\hat{\mathfrak{h}}^{(n)}}$.

- $\{\Upsilon_{\mathfrak{h}},\ \mathfrak{h} \in \mathfrak{H}\}$ – une famille de fonctionnelles à valeurs dans $\mathfrak{S}$.
- $\mathcal{E}_n(\mathfrak{h}, f) = \left(\mathbb{E}_{2,f}^{(n)}\{\rho^q(\widehat{B}_{\mathfrak{h}}, \Upsilon_{\mathfrak{h}}(f))\}\right)^{\frac{1}{q}}$;

$\underline{\mathbf{B}^{\mathrm{Sup}}.}$ $\exists C_\Psi \geq 1$ tels que pour tout $n \geq 1$

i) $$\sup_{f\in\mathbb{F}} \mathbb{E}_{1,f}^{(n)}\left(\sup_{\mathfrak{h}\in\mathfrak{H}_n}\left[\psi_n(f,\mathfrak{h}) - C_\Psi \Psi_n(\mathfrak{h})\right]_+^q\right) \leq \varepsilon_n^q;$$

ii) $$\sup_{f\in\mathbb{F}} \mathbb{E}_{1,f}^{(n)}\left(\sup_{\mathfrak{h}\in\mathfrak{H}_n}\left[\Psi_n(\mathfrak{h}) - C_\Psi \psi_n(f,\mathfrak{h})\right]_+^q\right) \leq \varepsilon_n^q;$$

Estimation de B. Quelques Notations

Notations.

$$\tau_n(f) = \sup_{\mathfrak{h}\in\mathfrak{B}_n(f)} \mathcal{E}_n(\mathfrak{h}, f) + \left(\frac{5\varepsilon_n}{\delta_n}\right) \sup_{\mathfrak{h}\in\mathfrak{h}_n} \mathcal{E}_n(f, \mathfrak{h})$$

$$\nu_n(f) = \sup_{\mathfrak{h}\in\mathfrak{A}_n(f)} \rho\big(\Upsilon_{\mathfrak{h}}(f), B(f)\big) + \left(\frac{30\varepsilon_n}{\delta_n}\right) \sup_{\mathfrak{h}\in\mathfrak{h}_n} \rho\big(\Upsilon_{\mathfrak{h}}(f), B(f)\big)$$

$$\mathfrak{A}_n(f) = \left\{\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}_n : \Psi_n(\mathfrak{h}) < 4C_\Psi \inf_{\mathfrak{h}\in\mathfrak{H}_n} \left[\mathcal{B}_A^{(n)}(f, \mathfrak{h}) + 2\psi_n(f, \mathfrak{h})\right]\right\}$$

$$\mathfrak{B}_n(f) = \left\{\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}_n : \psi_n(f, \mathfrak{h}) < 2C_\Psi^2 \inf_{\mathfrak{h}\in\mathfrak{H}_n} \left[\mathcal{B}_A^{(n)}(f, \mathfrak{h}) + 2\psi_n(f, \mathfrak{h})\right]\right\}$$

Première procédure et inégalité d'oracle.

$\underline{\mathbf{B}^{\mathrm{Sup}}}$. $\exists C_\psi \geq 1$ tels que pour tout $n \geq 1$

i) $$\sup_{f\in\mathbb{F}} \mathbb{E}_{1,f}^{(n)}\left(\sup_{\mathfrak{h}\in\mathfrak{H}_n} \left[\psi_n(f,\mathfrak{h}) - C_\psi \Psi_n(\mathfrak{h})\right]_+^q \right) \leq \varepsilon_n^q;$$

ii) $$\sup_{f\in\mathbb{F}} \mathbb{E}_{1,f}^{(n)}\left(\sup_{\mathfrak{h}\in\mathfrak{H}_n} \left[\Psi_n(\mathfrak{h}) - C_\psi \psi_n(f,\mathfrak{h})\right]_+^q \right) \leq \varepsilon_n^q;$$

Théorème 2. Supposons $\mathbf{A}^{\mathrm{commute}}$, $\mathbf{A}^{\mathrm{Sup}}$ et $\mathbf{B}^{\mathrm{Sup}}$ vérifiées.

Soit $\hat{\mathfrak{h}}^{(n)}$ obtenu par règle de sélection (Ψ_n, ℓ). Alors, pour tout $f \in \mathbb{F}$ et $n \geq 1$

$$\mathcal{R}_B\left[\widehat{B}_{\hat{\mathfrak{h}}^{(n)}}, f\right] \leq \tau_n(f) + \nu_n(f).$$

$$\tau_n(f) = \sup_{\mathfrak{h}\in\mathfrak{B}_n(f)} \mathcal{E}_n(\mathfrak{h}, f) + \left(5\varepsilon_n/\delta_n\right) \sup_{\mathfrak{h}\in\mathfrak{h}_n} \mathcal{E}_n(f,\mathfrak{h})$$

$$\nu_n(f) = \sup_{\mathfrak{h}\in\mathfrak{A}_n(f)} \rho\big(\Upsilon_\mathfrak{h}(f), B(f)\big) + \left(30\varepsilon_n/\delta_n\right) \sup_{\mathfrak{h}\in\mathfrak{h}_n} \rho\big(\Upsilon_\mathfrak{h}(f), B(f)\big)$$

Deuxième procédure et inégalité d'oracle.

Problème. Nous remarquons que l'inégalité d'oracle obtenue dans le théorème 2 n'est pas habituelle.

But. Améliorer l'inégalité d'oracle obtenue dans le théorème 2 en ajoutant des hypothèses supplémentaires afin d'obtenir une inégalité similaire à celle du théorème 1.

Deuxième procédure et inégalité d'oracle .

$\mathbf{B}^{\text{Supplem}}$. $\exists C_{\mathcal{E}}$ tels que pour tout $f \in \mathbb{F}$, $n \geq 1$ et $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}_n$

$$\sup_{f \in \mathbb{F}} \mathcal{E}_n(f, \mathfrak{h}) \leq C_{\mathcal{E}}\, \Psi_n(\mathfrak{h})$$

$\mathbf{B}^{\text{Suppl}}$. $\exists C_{\ell}$ tels que pour tout $f \in \mathbb{F}$, $n \geq 1$ et $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}_n$

$$\rho\big(\Upsilon_{\mathfrak{h}}(f), B(f)\big) \leq C_{\ell}\, \ell\big(\Lambda_{\mathfrak{h}}(f), A(f)\big)$$

Théorème 3. Supposons $\mathbf{A}^{\text{commute}}$, $\mathbf{A}^{\text{Sup}}$,$\mathbf{B}^{\text{Suppl}}$ et $\mathbf{B}^{\text{Supplem}}$ vérifiées.

Soit $\hat{\mathfrak{h}}^{(n)}$ obtenu par la règle de sélection (Ψ_n, ℓ). Alors, pour tout $f \in \mathbb{F}, n \geq 1$ et $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}_n$

$$\mathcal{R}_B\big[\widehat{B}_{\hat{\mathfrak{h}}^{(n)}}, f\big] \leq \inf_{\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}_n} \left\{ C_1 \mathcal{B}_A^{(n)}(f, \mathfrak{h}) + C_2 \psi_n(f, \mathfrak{h}) \right\} + C_3 \varepsilon_n$$

- $C_1 = 2C_{\ell} + C_{\mathcal{E}}$,
- $C_2 = 7C_{\ell} + 2C_{\mathcal{E}}$ et
- $C_3 = 10C_{\ell} + 3C_{\mathcal{E}}$

Estimation adaptative de A.

- Soit $\{\mathbb{F}_\vartheta, \vartheta \in \Theta\}$ une famille donnée de sous-ensemble de $\mathbb{F}$.

Théorème 4. Supposons A^{commute} et A^{Sup} vérifiées.

Soit $\hat{\mathfrak{h}}^{(n)}$ obtenu par la règle de sélection (Ψ_n, ℓ). Alors, pour tout $\vartheta \in \Theta$, on a

$$\sup_{f \in \mathbb{F}_\vartheta} \mathcal{R}_A\big[\widehat{A}_{\hat{\mathfrak{h}}^{(n)}}, f\big] \leq 5\, s_n\big(\mathbb{F}_\vartheta\big)$$

- $s_n\big(\mathbb{F}_\vartheta\big) = \sup_{f \in \mathbb{F}_\vartheta} \big[\inf_{\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}_n} \big\{\mathcal{B}_A^{(n)}(f, \mathfrak{h}) + \psi_n(f, \mathfrak{h})\big\}\big]$.

- $\varepsilon_n = o\big(\inf_{\vartheta \in \Theta} s_n\big(\mathbb{F}_\vartheta\big)\big)$.

Estimation Adaptative analogue pour le théorème 2

Théorème 5. Supposons $\mathrm{A}^{\mathrm{commute}}$, $\mathrm{A}^{\mathrm{Sup}}$ et $\mathrm{B}^{\mathrm{Sup}}$ vérifiées.

Soit $\hat{\mathfrak{h}}^{(n)}$ obtenu par la règle de sélection (Ψ_n, ℓ). Alors, pour tout $\vartheta \in \Theta$ *et* $n \geq 1$, on a

$$\sup_{f \in \mathbb{F}_\vartheta} \mathcal{R}_B\big[\widehat{B}_{\hat{\mathfrak{h}}^{(n)}}, f\big] \leq \varphi_n\big(\mathbb{F}_\vartheta\big)$$

- $$\varphi_n\big(\mathbb{F}_\vartheta\big) = \sup_{f \in \mathbb{F}_\vartheta} \Big[\sup_{\mathfrak{h} \in \mathfrak{B}_n(f)} \mathcal{E}_n(\mathfrak{h}, f) + \sup_{\mathfrak{h} \in \mathfrak{A}_n(f)} \rho\big(\Upsilon_{\mathfrak{h}}(f), B(f)\big)\Big].$$
- $$\kappa_n\big(\mathbb{F}_\vartheta\big) = (5\varepsilon_n/\delta_n) \sup_{f \in \mathbb{F}_\vartheta} \Big[\sup_{\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}_n} \mathcal{E}_n(\mathfrak{h}, f) + \sup_{\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}_n} \rho\big(\Upsilon_{\mathfrak{h}}(f), B(f)\big)\Big].$$
- $\kappa_n\big(\mathbb{F}_\vartheta\big) = o\big(\varphi_n\big(\mathbb{F}_\vartheta\big)\big)$.